PDF
DOWNLOAD

E-Book
komplett

Kopiervorlagen mit Lösungen

Sekundarstufe 1

Werner Freißler / Otto Mayr

Bildungsstandards Mathematik

Testaufgaben
für alle weiterführenden Schularten

10. Klasse

BRIGG VERLAG
F.-J. Büchler KG

Bestellnummer: 112DL
ISBN 978-3-95660-**112**-5 (Druckausgabe)

www.brigg-verlag.de

BRIGG VERLAG
F.-J. Büchler KG

Werner Freißler/Otto Mayr

Bildungsstandards Mathematik

Testaufgaben für alle weiterführenden Schularten

10. Klasse

Kopiervorlagen mit Lösungen

BRIGG VERLAG

www.brigg-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mit Beschluss vom 04. Dezember 2003 wurde die Einführung von Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss beschlossen. Bildungsstandards sollen Bestandteile eines umfassenden Systems der Qualitätssicherung werden. Sie beschreiben erwartete Lernergebnisse und sollen Hinweise für notwendige Förderungsmaßnahmen geben.

Die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss thematisieren die mathematischen Kompetenzen, über die Schüler und Schülerinnen verfügen sollen:
K 1: Mathematisch argumentieren
K 2: Probleme mathematisch lösen
K 3: Mathematisch modellieren
K 4: Mathematische Darstellungen verwenden
K 5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
K 6: Kommunizieren

Diese beschriebenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben. Diese Kompetenzen werden wiederum Leitideen zugeordnet. Folgende mathematischen Leitideen, die Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete vereinigen, sind zu Grunde gelegt:

- Zahl
- Messen
- Raum und Form
- Funktionaler Zusammenhang
- Daten und Zufall

Zum Lösen mathematischer Aufgaben werden im Allgemeinen mathematische Kompetenzen in unterschiedlicher Ausprägung benötigt. Diesbezüglich lassen sich drei Anforderungsbereiche unterscheiden, wobei Anspruch und kognitive Komplexität jeweils zunehmen:

- Anforderungsbereich I: Reproduzieren
- Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen
- Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und reflektieren

Der vorliegende Band will dem Lehrer / der Lehrerin helfen, die Ziele der Bildungsstandards Mathematik in die Praxis umzusetzen. Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade (I–IV) mit Angabe der jeweiligen Kompetenz und Leitidee sollen den Lehrer dabei unterstützen, den nötigen Förderbedarf zu bestimmen, um dann individuelle Hilfestellung leisten zu können.

Thema: Potenzrechnen		Name:	
Inhalt: Potenzgesetze	**Schwierigkeitsgrad:** I – IV	**Kompetenz:** 2, 3, 4, 5	**Leitidee:** 1

Große Zahlen, kleine Zahlen


Tera

Mega

G

10^{-12}

10^{3}

μ

Nano

m

Aufgabe 1 (I):

Bedienen Sie sich der Angaben und erstellen Sie eine vollständige Tabelle!

Mathematischer Begriff	Symbol	Potenzdarstellung	Zahlendarstellung
Kilo			
Mega			
Giga			
Tera			
Milli			
Mikro			
Nano			
Piko			

Aufgabe 2 (III):

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

a) $x^0 \cdot x^5 \cdot x^{-2} =$ ______;

b) $\left(a^4b^3\right)^2 =$ ______;

c) $\sqrt[6]{8^4} =$ ______;

d) $\frac{x^9}{x^{-6}} =$ ______;

e) $\sqrt[5]{1024} : \sqrt[3]{125} + \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[9]{512}} - 5^{-2} =$ ______;

f) $a^x \cdot b^y \cdot a \cdot b^{3y} =$ ______;

g) $\left(m^2z\right)^{-5} =$ ______;

h) $a^0 \cdot a^x \cdot a^y =$ ______;

i) $x^{n+1} \cdot x^n \cdot x^{n-1} =$ ______;

j) $\frac{60a^8 \cdot 56b^7 \cdot a^{-2}}{12a^3 \cdot 7b^6 \cdot 5a^2} =$ ______;

k) $7^n = 2401 \rightarrow n =$ ______;

Aufgabe 3 (IV):

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

a) $x^m \cdot y^n \cdot x \cdot y^{2n} =$ ______;

b) $\left(a^2b\right)^{-4} =$ ______;

c) $x^0 \cdot x^a \cdot x^b =$ ______;

d) $a^{n+1} \cdot a^n \cdot a^{n-1} =$ ______;

e) $\dfrac{a^{3x}}{a^{-x}} =$ ______;

f) $(-x)^5 \cdot \left(yx^2\right)^{-3} =$ ______ $=$ ______;

g) $\sqrt{x^n} =$ ______;

h) $\log_6 1\,296 =$ ______ $\rightarrow$ ______;

i) $8^{\frac{2}{3}} =$ ______ $=$ ______ $=$ ___;

j) $8^{-\frac{2}{3}} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______ $=$ ___;

k) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 =$ ______ $=$ ______

l) $a^{\frac{1}{x}} : b^{\frac{1}{x}} =$ ______;

m) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k =$ ___ $=$ ______

Aufgabe 4 (II):

Der Fixstern, der unserem Planetensystem im Weltall am nächsten ist, heißt Alpha Centauri.
Er ist 4,3 Lichtjahre von der Erde entfernt.
Wie weit ist er von der Erde entfernt, wenn die Strecke eines Lichtjahres $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km beträgt?

Aufgabe 5 (II):

Vergleichen Sie die Fläche von Amerika (41 930 000 km^2) mit der Fläche von Afrika ($3{,}01 \cdot 10^7$ km^2)!

Aufgabe 6 (II):

Vergleichen Sie die Fläche der Sonne ($6{,}087 \cdot 10^{12}$ km^2) mit der Fläche Amerikas! Runden Sie sinnvoll!

Förderbedarf:

Thema: Potenzrechnen			Lösungsblatt
Inhalt: Potenzgesetze	**Schwierigkeitsgrad:** I – IV	**Kompetenz:** 2, 3, 4, 5	**Leitidee:** 1

Große Zahlen, kleine Zahlen


Tera

Mega

G

10^{-12}

10^3

µ

Nano

m

Aufgabe 1 (I):

Bedienen Sie sich der Angaben und erstellen Sie eine vollständige Tabelle!

Mathematischer Begriff	Symbol	Potenzdarstellung	Zahlendarstellung
Kilo	k	10^3	1.000
Mega	M	10^6	1.000.000
Giga	G	10^9	1.000.000.000
Tera	T	10^{12}	1.000.000.000.000
Milli	m	10^{-3}	0,001
Mikro	µ	10^{-6}	0,000 001
Nano	n	10^{-9}	0,000 000 001
Piko	p	10^{-12}	0,000 000 000 001

Aufgabe 2 (III):

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

a) $x^0 \cdot x^5 \cdot x^{-2} = \underline{\underline{x^3}}$;

b) $\left(a^4b^3\right)^2 = \underline{\underline{a^8b^6}}$;

c) $\sqrt[6]{8^4} = \underline{\underline{4}}$;

d) $\frac{x^9}{x^{-6}} = \underline{\underline{x^{15}}}$;

e) $\sqrt[5]{1024} : \sqrt[3]{125} + \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[9]{512}} - 5^{-2} = \underline{\underline{2{,}26}}$;

f) $a^x \cdot b^y \cdot a \cdot b^{3y} = \underline{\underline{a^{x+1} \cdot b^{4y}}}$;

g) $\left(m^2z\right)^{-5} = \underline{\underline{m^{-10}z^{-5}}}$;

h) $a^0 \cdot a^x \cdot a^y = \underline{\underline{a^{x+y}}}$;

i) $x^{n+1} \cdot x^n \cdot x^{n-1} = \underline{\underline{x^{3n}}}$;

j) $\frac{60a^8 \cdot 56b^7 \cdot a^{-2}}{12a^3 \cdot 7b^6 \cdot 5a^2} = \underline{\underline{8ab}}$;

k) $7^n = 2401 \rightarrow n = \underline{\underline{4}}$

Aufgabe 3 (IV):

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

a) $x^m \cdot y^n \cdot x \cdot y^{2n} = \underline{\underline{x^{m+1} \cdot y^{3n}}}$;

b) $(a^2b)^{-4} = \underline{\underline{a^{-8}b^{-4}}}$;

c) $x^0 \cdot x^a \cdot x^b = \underline{\underline{x^{a+b}}}$;

d) $a^{n+1} \cdot a^n \cdot a^{n-1} = \underline{\underline{a^{3n}}}$;

e) $\frac{a^{3x}}{a^{-x}} = \underline{\underline{a^{4x}}}$;

f) $(-x)^5 \cdot (yx^2)^{-3} = \underline{\underline{-x^5 \cdot y^{-3} \cdot x^{-6}}} = \underline{\underline{-x^{-1} \cdot y^{-3}}}$;

g) $\sqrt{x^n} = \underline{\underline{x^{\frac{n}{2}}}}$;

h) $\log_6 1\,296 = \underline{\underline{4}} \rightarrow \underline{\underline{6^4 = 1\,296}}$;

i) $8^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{8^2}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{64}}} = \underline{\underline{4}}$;

j) $8^{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{8^{-2}}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{1}{8^2}}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{1}{64}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$;

k) $(\sqrt[3]{a})^2 = \underline{\underline{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{a^2}}}$

l) $a^{\frac{1}{x}} : b^{\frac{1}{x}} = \underline{\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}}}$;

m) $(\sqrt[n]{a})^k = \underline{\underline{a^{\frac{k}{n}}}} = \underline{\underline{\sqrt[n]{a^k}}}$

Aufgabe 4 (II):

Der Fixstern, der unserem Planetensystem im Weltall am nächsten ist, heißt Alpha Centauri.
Er ist 4,3 Lichtjahre von der Erde entfernt.
Wie weit ist er von der Erde entfernt, wenn die Strecke eines Lichtjahres $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km beträgt?

$$4{,}3 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12}\text{ km} \approx \underline{\underline{4{,}0678^{13}\text{ km}}}$$
$$\approx \underline{\underline{40\,678\,000\,000\,000\text{ km}}}$$

Aufgabe 5 (II):

Vergleichen Sie die Fläche von Amerika (41 930 000 km^2) mit der Fläche von Afrika ($3{,}01 \cdot 10^7$ km^2)!

$$\frac{4{,}193 \cdot 10^7}{3{,}01 \cdot 10^7} \approx \underline{\underline{1{,}39}}$$

Amerika ist ca. eineinhalbmal so groß wie Afrika.

Aufgabe 6 (II):

Vergleichen Sie die Fläche der Sonne ($6{,}087 \cdot 10^{12}$ km^2) mit der Fläche Amerikas! Runden Sie sinnvoll!

$$\frac{6{,}087 \cdot 10^{12}}{4{,}193 \cdot 10^7} \approx \underline{\underline{150\,000}}$$

Die Oberfläche der Sonne ist ca. 200 000-mal so groß wie die Fläche Amerikas.

Förderbedarf:

Thema: Wachstumsprozesse		Name:	
Inhalt: Biologisches Wachstum	**Schwierigkeitsgrad:** I – III	**Kompetenz:** 2, 3, 4, 5	**Leitidee:** 4

Naherholungsgebiet in Planung

Eine Gemeinde plant, das Gelände um einen ehemaligen Baggersee zu einem Naherholungszentrum auszubauen. Dazu wird zunächst ein kleiner See erweitert. Jede Woche vergrößern Bagger die Wasserfläche von anfänglich 800 m^2 um 400 m^2. Eine schnell wachsende Algenart bereitet Schwierigkeiten. Sie verdoppelt jede Woche ihre Fläche. Zu Beginn waren rund 100 m^2 betroffen.

Aufgabe 1 (II):

a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen für beide Wachstumsprozesse!
Erstellen Sie jeweils eine Wertetabelle!
Stellen Sie die Vergrößerung der Seefläche durch die Bagger und das Algenwachstum graphisch dar! (x-Achse: 1 Woche = 1 cm; y-Achse: 400 m^2 = 1 cm).

b) Nach wie vielen Wochen ist der mittlerweile neu ausgebaggerte See bereits völlig von Algen befallen?

Aufgabe 2 (III):

Zu Beginn einer bakteriologischen Untersuchung werden 80 Bakterien gezählt.
Innerhalb von 6 Stunden verdoppelt sich ihre Anzahl.

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die ersten 24 Stunden in 6-Stunden-Intervallen!
b) Zeichnen Sie den Wachstumsprozess in ein geeignetes Koordinatensystem!
c) Wie viele Bakterien sind nach einer Woche vorhanden?
   Lösen Sie mithilfe einer Funktionsgleichung!
   Geben Sie das Ergebnis sowohl als Zehnerpotenz als auch in Langform an!

Aufgabe 3 (II):

Ein Virenart verdoppelt ihre Zahl pro Stunde. Momentan befinden sich 512 Viren im Körper eines Menschen.

a) Wie hoch ist die Zahl der Viren in 5 Stunden?
b) Wie hoch war die Zahl der Viren vor 3 Stunden?

Förderbedarf:

Thema: Wachstumsprozesse			Lösungsblatt
Inhalt: Biologisches Wachstum	**Schwierigkeitsgrad:** I – III	**Kompetenz:** 2, 3, 4, 5	**Leitidee:** 4

Naherholungsgebiet in Planung

Eine Gemeinde plant, das Gelände um einen ehemaligen Baggersee zu einem Naherholungszentrum auszubauen. Dazu wird zunächst ein kleiner See erweitert. Jede Woche vergrößern Bagger die Wasserfläche von anfänglich 800 m^2 um 400 m^2. Eine schnell wachsende Algenart bereitet Schwierigkeiten. Sie verdoppelt jede Woche ihre Fläche. Zu Beginn waren rund 100 m^2 betroffen.

Aufgabe 1 (II):

a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen für beide Wachstumsprozesse!
Erstellen Sie jeweils eine Wertetabelle!
Stellen Sie die Vergrößerung der Seefläche durch die Bagger und das Algenwachstum graphisch dar!
(x-Achse: 1 Woche = 1 cm; y-Achse: 400 m^2 = 1 cm).

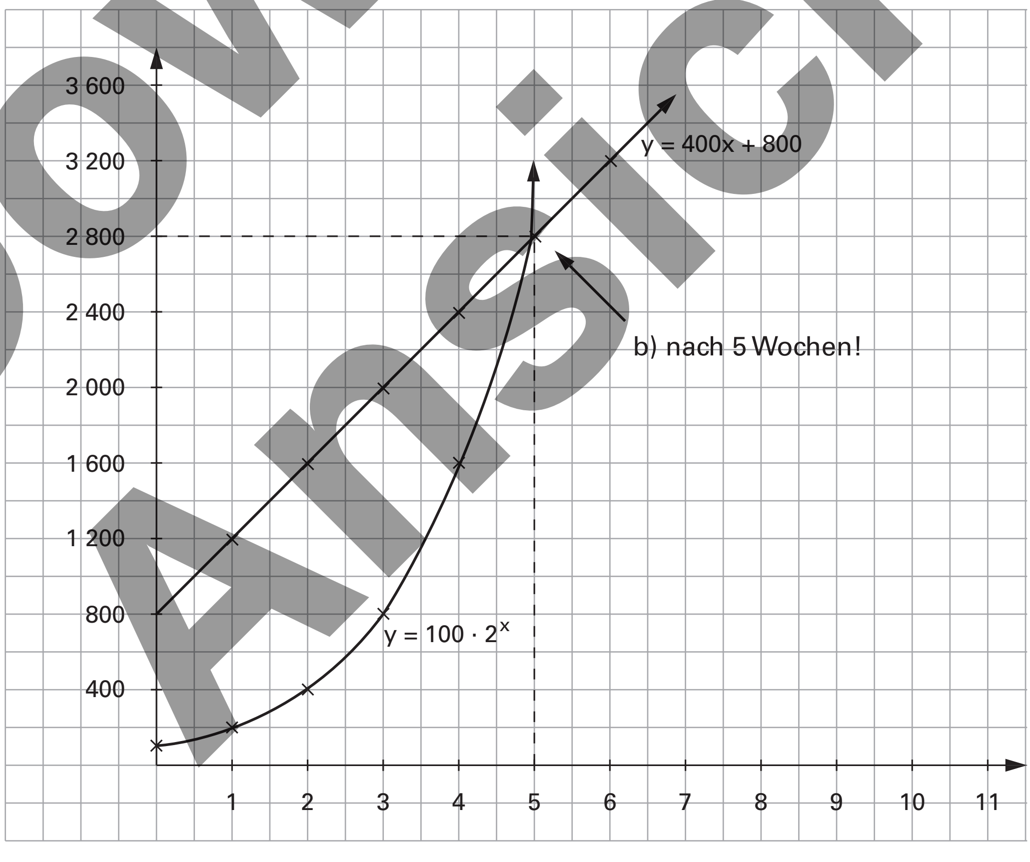
b) Nach wie vielen Wochen ist der mittlerweile neu ausgebaggerte See bereits völlig von Algen befallen?

a) $y = 400x + 800$:

1	2	3	4	5	6
1 200	1 600	2 000	2 400	2 800	3 200

$y = 100 \cdot 2^x$:

1	2	3	4	5	6
200	400	800	1 600	3 200	6 400



Aufgabe 2 (III):

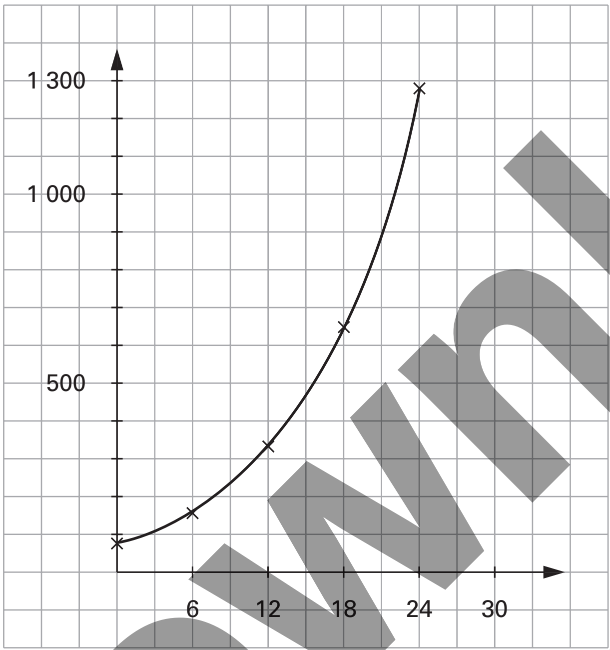
Zu Beginn einer bakteriologischen Untersuchung werden 80 Bakterien gezählt.
Innerhalb von 6 Stunden verdoppelt sich ihre Anzahl.

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die ersten 24 Stunden in 6-Stunden-Intervallen!
b) Zeichnen Sie den Wachstumsprozess in ein geeignetes Koordinatensystem!
c) Wie viele Bakterien sind nach einer Woche vorhanden?
Lösen Sie mithilfe einer Funktionsgleichung!
Geben Sie das Ergebnis sowohl als Zehnerpotenz als auch in Langform an!

a)

h	0	6	12	18	24
B	80	160	320	640	1 280

b)



c) $y = n \cdot a^x$

$y = 80 \cdot 2^{28}$ $[7 \cdot (24 : 6)] = 28$

$y = \underline{\underline{2{,}147483648 \cdot 10^{10}}}$

$= \underline{\underline{21\,474\,836\,480 \text{ Bakterien}}}$

Aufgabe 3 (II):

Ein Virenart verdoppelt ihre Zahl pro Stunde. Momentan befinden sich 512 Viren im Körper eines Menschen.

a) Wie hoch ist die Zahl der Viren in 5 Stunden?
b) Wie hoch war die Zahl der Viren vor 3 Stunden?

a) $y = n \cdot a^x$

$y = 512 \cdot 2^5$

$\underline{\underline{y = 16\,384}}$

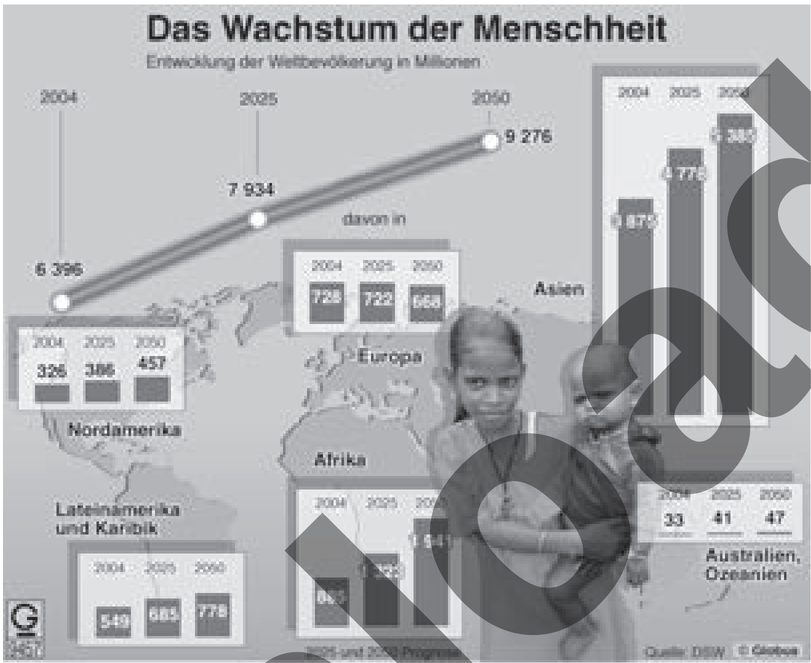
b) $y = n \cdot a^x$

$y = 512 \cdot 2^{-3}$

$\underline{\underline{y = 64}}$

Förderbedarf:

Thema: Wachstumsprozesse		Name:	
Inhalt: **Bevölkerungswachstum**	**Schwierigkeitsgrad:** **I – IV**	**Kompetenz:** **1, 2, 5**	**Leitidee:** **1, 4**



Aufgabe 1 (I):

a) Welcher Erdteil weist das größte absolute Wachstum in den Jahren 2004–2050 auf?
b) Wie hoch ist der prozentuale Anstieg?
c) Wie hoch ist die Wachstumsrate pro Jahr?
d) Um wievielmal höher ist die Wachstumsrate von 2004 bis 2025 im Vergleich zur Wachstumsrate von 2025 bis 2050?

Aufgabe 2 (II):

Direktor Hoffmann analysiert die Umsatzentwicklung seiner Firma von 1990 bis 2005.
Er meint, eine Steigerung von 20 Millionen auf 35 Millionen sei ein recht ordentlicher Erfolg: immerhin eine Steigerung von 5 % pro Jahr.

a) Beurteilen Sie die Aussage des Direktors:
Die Aussage ist richtig/falsch, weil

- ☐ er die Entwicklung als lineares Wachstum auffasst
- ☐ er die Entwicklung als exponentielles Wachstum auffasst

b) Belegen Sie Ihre Meinung mit der Berechnung!

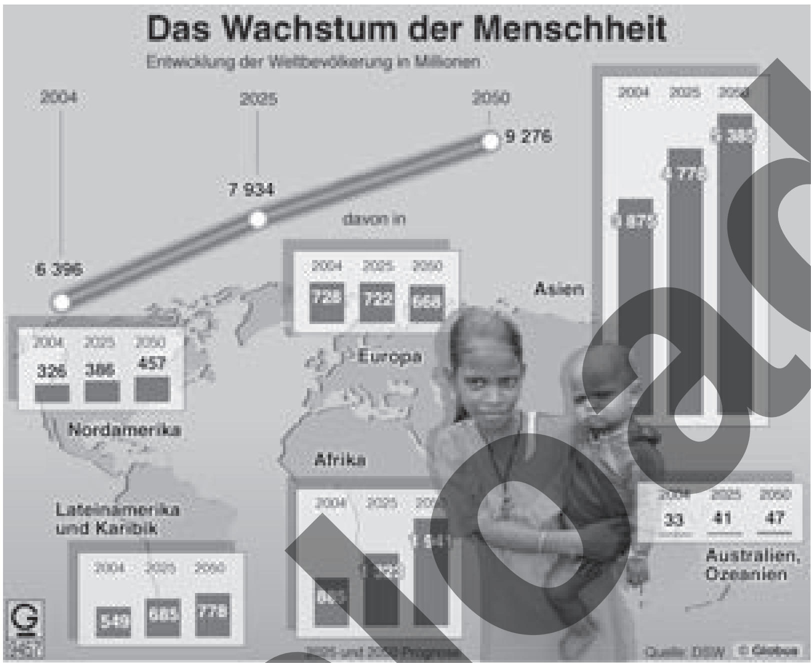
c) Stellen Sie die logische Folgefrage und berechnen Sie!

Aufgabe 3 (III):

Eine Firma möchte ihre Exportquote bei einer Steigerung von 24,5 % pro Jahr verdreifachen. Wie viele Jahre braucht sie dazu? Stellen Sie die Berechnung an einem frei gewählten Beispiel dar! Rechnen Sie mit dem Logarithmus!

Förderbedarf:

Thema: Wachstumsprozesse			Lösungsblatt
Inhalt: Bevölkerungswachstum	**Schwierigkeitsgrad:** I – IV	**Kompetenz:** 1, 2, 5	**Leitidee:** 1, 4



Aufgabe 1 (I):

a) Welcher Erdteil weist das größte absolute Wachstum in den Jahren 2004–2050 auf?
b) Wie hoch ist der prozentuale Anstieg?
c) Wie hoch ist die Wachstumsrate pro Jahr?
d) Um wievielmal höher ist die Wachstumsrate von 2004 bis 2025 im Vergleich zur Wachstumsrate von 2025 bis 2050?

a) Asien: 5 385 Mio. – 3 875 Mio. = $\underline{\underline{1\,510 \text{ Mio.}}}$

b) $3\,875 = 100\ \%$ $\qquad$ $PS = \dfrac{1\,510 \cdot 100}{3\,875}$

$38{,}75 = 1\ \%$ $\qquad$ $PS \approx \underline{\underline{39\ \%}}$

$1\,510 \approx \underline{\underline{39\ \%}}$

c) $5{,}385 = 3{,}875 \cdot q^{46} \quad |: 3{,}875$

$1{,}390 \approx q^{46} \quad | \sqrt[46]{\ }$

$1{,}007 \approx q \rightarrow \underline{\underline{p = 0{,}7\ \%}}$

d) $4\,778 = 3\,875 \cdot q^{21} \quad |: 3{,}875$ $\qquad$ $5\,385 = 4\,778 \cdot q^{26} \quad |: 4\,778$

$1{,}233 \approx q^{21} \quad | \sqrt[21]{\ }$ $\qquad$ $1{,}127 \approx q^{26} \quad | \sqrt[26]{\ }$

$1{,}01 \approx q \rightarrow \underline{\underline{p = 1\ \%}}$ $\qquad$ $1{,}0046 \approx q \rightarrow \underline{\underline{p = 0{,}46\ \%}}$

→ ca. doppelt so hoch!

Aufgabe 2 (II):

Direktor Hoffmann analysiert die Umsatzentwicklung seiner Firma von 1990 bis 2005.
Er meint, eine Steigerung von 20 Millionen auf 35 Millionen sei ein recht ordentlicher Erfolg: immerhin eine Steigerung von 5 % pro Jahr.

a) Beurteilen Sie die Aussage des Direktors:
Die Aussage ist ~~richtig~~/falsch, weil

- ☒ er die Entwicklung als lineares Wachstum auffasst
- ☐ er die Entwicklung als exponentielles Wachstum auffasst

b) Belegen Sie Ihre Meinung mit der Berechnung!

$y = n \cdot a^x$ $\qquad$ $1{,}75 = a^{15} \mid \sqrt[15]{\ }$

$35 = 20 \cdot a^{15} \mid : 20$ $\qquad$ $1{,}038 = a \rightarrow \underline{\underline{p = 3{,}8\ \%}}$

c) Stellen Sie die logische Folgefrage und berechnen Sie!

Wie hoch wäre der Umsatz bei der angenommenen Steigerung von 5 % pro Jahr?

$y = 20 \cdot 1{,}05^{15}$ [Mio.]

$y = \underline{\underline{41{,}6 \text{ [Mio]}}}$

Aufgabe 3 (III):

Eine Firma möchte ihre Exportquote bei einer Steigerung von 24,5 % pro Jahr verdreifachen. Wie viele Jahre braucht sie dazu? Stellen Sie die Berechnung an einem frei gewählten Beispiel dar! Rechnen Sie mit dem Logarithmus!

$18\,000 = 6\,000 \cdot 1{,}245^x \mid : 6\,000$

$3 = 1{,}245^x \rightarrow \frac{\log 3}{\log 1{,}245} \approx \underline{\underline{5 \text{ [Jahre]}}}$

Förderbedarf:

Thema: Wachstumsprozesse		Name:	
Inhalt: Kapitalwachstum	**Schwierigkeitsgrad:** I – III	**Kompetenz:** 1, 2, 5	**Leitidee:** 4

Geldgeschenke

Wolfgang bekommt zum 10. Geburtstag von seiner Oma einen Sparbrief über 3 000 € geschenkt. Der Zinssatz beträgt 4,25 % über die Laufzeit von 8 Jahren. Die Zinsen bleiben jeweils auf dem Konto und werden mitverzinst.

Aufgabe 1 (I):

a) Wie viele € bekommt Wolfgang an seinem 18. Geburtstag ausbezahlt? (Runde sinnvoll!)
b) Wie hoch sind die Zinsen für den gesamten Zeitraum?
c) Wie hoch ist die Gesamtverzinsung (in Prozent)?

Aufgabe 2 (II):

Frau Schneider hat sich einen Sparbrief bei ihrer Bank gekauft.
Der Zinssatz pro Jahr bleibt über die ganze Laufzeit von 5 Jahren gleich.
Die Zinsen bleiben jeweils auf dem Konto und werden mitverzinst.
Die Bank berechnet die nebenstehenden Kontostände für das jeweilige Jahresende voraus.

Jahr	Kapital (€)
nach 1 J.	8 380
nach 2 J.	8 778,05
nach 3 J.	9 195,01
nach 4 J.	9 631,77
nach 5 J.	10 089,28

a) Wie hoch ist der vereinbarte Zinssatz?
b) Über wie viele € lautet der Sparbrief?
c) Welches Endkapital wäre nach 10 Jahren zu erzielen?

Aufgabe 3 (II):

Herr Stoll möchte 20 000 € gewinnbringend anlegen. Die Bank unterbreitet ihm zwei Vorschläge:

Anlage A:	Anlage B:
Sparbrief mit 3,3 % Zinsen über eine Laufzeit von 7 Jahren	Bundesschatzbriefe mit einer Laufzeit von 7 Jahren mit gestaffeltem Zinssatz: 1. Jahr: 2,5 % 2. Jahr: 2,75 % 3. Jahr: 3,25 % 4. Jahr: 3,75 % 5. Jahr: 4,25 % 6. Jahr: 4,5 % 7. Jahr 4,5 %

Herr Stoll rechnet so:

Angebot A: $20\,000 \cdot 0{,}033 \cdot 7 = \underline{\underline{4\,620}}$ $\qquad 20\,000 + 4\,620 = \underline{\underline{24\,620}}$

Angebot B: $(2{,}5 + 2{,}75 + 3{,}25 + 3{,}75 + 4{,}25 + 4{,}5 + 4{,}5) : 7 \approx \underline{\underline{3{,}6\ [\%]}}$

$20\,000 \cdot 0{,}036 \cdot 7 = \underline{\underline{5\,040}}$ $\qquad 20\,000 + 5\,040 = \underline{\underline{25\,040}}$

Ist seine Rechnung richtig?

Aufgabe 4 (III):

Herr Braun legt 12 000 € zu einem Zinssatz von 4 % für sechs Jahre an. Die Zinsen werden jedes Jahr gutgeschrieben und mitverzinst.

a) Wie hoch ist das Endkapital nach 6 Jahren?
b) Nach wie vielen Jahren hätte sich das Kapital bei sonst gleichen Bedingungen verdoppelt?
c) Welchen festen Zinssatz hat Herr Braun erhalten, wenn er nach 6 Jahren ein Endkapital von 19 086,29 € erreicht?

Förderbedarf:

Thema: Wachstumsprozesse		Lösungsblatt	
Inhalt: Kapitalwachstum	**Schwierigkeitsgrad:** I – III	**Kompetenz:** 1, 2, 5	**Leitidee:** 4

Geldgeschenke

Wolfgang bekommt zum 10. Geburtstag von seiner Oma einen Sparbrief über 3 000 € geschenkt. Der Zinssatz beträgt 4,25 % über die Laufzeit von 8 Jahren. Die Zinsen bleiben jeweils auf dem Konto und werden mitverzinst.

Aufgabe 1 (I):

a) Wie viele € bekommt Wolfgang an seinem 18. Geburtstag ausbezahlt? (Runde sinnvoll!)
b) Wie hoch sind die Zinsen für den gesamten Zeitraum?
c) Wie hoch ist die Gesamtverzinsung (in Prozent)?

a) $K_n = K_0 \cdot q_n$

$K_n = 3\,000 \cdot 1{,}0425^8$

$K_n = \underline{\underline{4\,185{,}33}}$

b) $4\,185{,}33 - 3\,000 = \underline{\underline{1\,185{,}33\ [€]}}$

c) $PS = \frac{1\,185{,}33 \cdot 100}{3\,000}$

$PS = \underline{\underline{39{,}5\ \%}}$

Aufgabe 2 (II):

Frau Schneider hat sich einen Sparbrief bei ihrer Bank gekauft.
Der Zinssatz pro Jahr bleibt über die ganze Laufzeit von 5 Jahren gleich.
Die Zinsen bleiben jeweils auf dem Konto und werden mitverzinst.
Die Bank berechnet die nebenstehenden Kontostände für das jeweilige Jahresende voraus.

Jahr	Kapital (€)
nach 1 J.	8 380
nach 2 J.	8 778,05
nach 3 J.	9 195,01
nach 4 J.	9 631,77
nach 5 J.	10 089,28

a) Wie hoch ist der vereinbarte Zinssatz?
b) Über wie viele € lautet der Sparbrief?
c) Welches Endkapital wäre nach 10 Jahren zu erzielen?

a) $p = \left(\frac{8\,778{,}05}{8\,380} - 1\right) \cdot 100$

$p = \underline{\underline{4{,}75\ \%}}$

b) $8\,380\ € : 1{,}0475 = \underline{\underline{8\,000\ €}}$

c) $K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_n = 8\,000\ € \cdot 1{,}0475^{10}$

$K_n = \underline{\underline{12\,724{,}20\ €}}$

Aufgabe 3 (II):

Herr Stoll möchte 20 000 € gewinnbringend anlegen. Die Bank unterbreitet ihm zwei Vorschläge:

Anlage A:	Anlage B:
Sparbrief mit 3,3 % Zinsen über eine Laufzeit von 7 Jahren	Bundesschatzbriefe mit einer Laufzeit von 7 Jahren mit gestaffeltem Zinssatz: 1. Jahr: 2,5 % 2. Jahr: 2,75 % 3. Jahr: 3,25 % 4. Jahr: 3,75 % 5. Jahr: 4,25 % 6. Jahr: 4,5 % 7. Jahr 4,5 %

Herr Stoll rechnet so:

Angebot A: $20\,000 \cdot 0{,}033 \cdot 7 = \underline{\underline{4\,620}}$ $\quad 20\,000 + 4\,620 = \underline{\underline{24\,620}}$

Angebot B: $(2{,}5 + 2{,}75 + 3{,}25 + 3{,}75 + 4{,}25 + 4{,}5 + 4{,}5) : 7 \approx \underline{\underline{3{,}6\ [\%]}}$

$20\,000 \cdot 0{,}036 \cdot 7 = \underline{\underline{5\,040}}$ $\quad 20\,000 + 5\,040 = \underline{\underline{25\,040}}$

Ist seine Rechnung richtig?

Angebot A ist richtig berechnet, Angebot B falsch. Bei gestaffelten Zinssätzen darf kein Durchschnittswert gebildet werden. Die richtige Rechnung wäre:

$20\,000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}0325 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0425 \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}045 \approx 25\,687{,}54\ [€]$

Aufgabe 4 (III):

Herr Braun legt 12 000 € zu einem Zinssatz von 4 % für sechs Jahre an. Die Zinsen werden jedes Jahr gutgeschrieben und mitverzinst.

a) Wie hoch ist das Endkapital nach 6 Jahren?
b) Nach wie vielen Jahren hätte sich das Kapital bei sonst gleichen Bedingungen verdoppelt?
c) Welchen festen Zinssatz hat Herr Braun erhalten, wenn er nach 10 Jahren ein Endkapital von 19 086,29 € erreicht?

a) $K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_n = 12\,000 \cdot 1{,}04^6$

$K_n = \underline{\underline{15\,183{,}83}}$

b) Lösungsweg 1: $p \cdot n = 70 \rightarrow n = \frac{70}{4} \approx \underline{\underline{17{,}5}}$

Lösungsweg 2: $\frac{\log 2}{\log 1{,}04} \approx \underline{\underline{17{,}7}}$

c) $p = \left(\sqrt[10]{\frac{19\,086{,}29}{12\,000}} - 1\right) \cdot 100 \approx \underline{\underline{4{,}75\ \%}}$

Förderbedarf:

Thema: Abnahmeprozesse		Name:	
Inhalt: Allgemeine Abnahmeprozesse	**Schwierigkeitsgrad:** I – III	**Kompetenz:** 1, 2, 4	**Leitidee:** 4

Traumwagen

Ein Sportwagen kostete vor fünf Jahren 120 000 €. Jetzt hat er noch einen Wert von 42 000 €.

Aufgabe 1 (I):

a) Wie hoch (in Prozent) ist der Wertverlust insgesamt am Ende der fünf Jahre?

b) Berechnen Sie den jährlichen prozentualen Wertverlust des Sportwagens!

c) In Wirklichkeit verlor der Sportwagen anfangs schneller an Wert.
So betrug die Wertminderung im ersten Jahr 24 %, im zweiten Jahr 20 % und im dritten Jahr 18 %.
Welchen Wert hatte der Sportwagen nach drei Jahren? Runden Sie sinnvoll!

d) Berechnen Sie den jährlichen Wertverlust für die zwei letzten Jahre!

Aufgabe 2 (II):

Entnehmen Sie aus der folgenden Berechnung die Aufgabenstellung:

a) $5\,000 \cdot 0{,}6^7 = 139{,}968 \approx \underline{\underline{140}}$

b) $\frac{140 \cdot 100}{5\,000} = \underline{\underline{2{,}8}}$

c) $752{,}9 : 0{,}6^{3,5} = \underline{\underline{4\,500}}$

In einem See verringert sich je 1 m Wassertiefe die Beleuchtungsstärke um ______ %

An der Oberfläche zeigt ein Belichtungsmesser ________ Lux.

a) Wie groß ist die Beleuchtungsstärke in ______ m Tiefe?

b) Wie viel % der ______________________________ sind dies noch?

c) Wie hoch war die Beleuchtungsstärke, wenn in ______ m Tiefe noch 752,9 Lux gemessen werden?

Aufgabe 3 (III):

Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt ca. 996 Hektopascal (hPa).
Mit jedem Kilometer Höhe nimmt er um ca. $\frac{1}{8}$ ab (Hinweis: keine lineare Abnahme!)

a) Um wie viel Prozent sinkt der Luftdruck in 2 800 m Höhe?

b) Wie viel hPa beträgt der Luftdruck auf dem höchsten Berg der Erde, dem Mount Everest mit 8 848 m? Runden Sie die Lösung auf einen Bruchteil!

c) In welcher Höhe über dem Meer beträgt der Luftdruck nur noch die Hälfte?

Förderbedarf:

Thema: Abnahmeprozesse		Lösungsblatt	
Inhalt: Allgemeine Abnahmeprozesse	**Schwierigkeitsgrad:** I – III	**Kompetenz:** 1, 2, 4	**Leitidee:** 4

Traumwagen

Ein Sportwagen kostete vor fünf Jahren 120 000 €. Jetzt hat er noch einen Wert von 42 000 €.

Aufgabe 1 (I):

a) Wie hoch (in Prozent) ist der Wertverlust insgesamt am Ende der fünf Jahre?

b) Berechnen Sie den jährlichen prozentualen Wertverlust des Sportwagens!

c) In Wirklichkeit verlor der Sportwagen anfangs schneller an Wert.
So betrug die Wertminderung im ersten Jahr 24 %, im zweiten Jahr 20 % und im dritten Jahr 18 %.
Welchen Wert hatte der Sportwagen nach drei Jahren? Runden Sie sinnvoll!

d) Berechnen Sie den jährlichen Wertverlust für die zwei letzten Jahre!

a) $PS = \frac{PW \cdot 100}{GW} = \frac{42\,000 \cdot 100}{120\,000} = \underline{\underline{35\ \%}}$

$\rightarrow$ 65 % Wertverlust

b) $42\,000 = 120\,000 \cdot q^5 \quad | : 120\,000$

$0{,}35 \approx q^5 \quad | \sqrt[5]{}$

$\underline{\underline{0{,}81 \approx q}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{p = 19\ \%}}$

c) $120\,000 \cdot 0{,}76 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}82 = 59\,827{,}20$

$\approx \underline{\underline{59\,800}}$

d) $42\,000 = 59\,800 \cdot q^2 \quad | : 59\,800$

$0{,}70 \approx q^2 \quad | \sqrt{}$

$\underline{\underline{0{,}84 \approx q}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{p = 16\ \%}}$

Aufgabe 2 (II):

Entnehmen Sie aus der folgenden Berechnung die Aufgabenstellung:

a) $5\,000 \cdot 0{,}6^7 = 139{,}968 \approx \underline{\underline{140}}$

b) $\dfrac{140 \cdot 100}{5\,000} = \underline{\underline{2{,}8}}$

c) $752{,}9 : 0{,}6^{3{,}5} = \underline{\underline{4\,500}}$

In einem See verringert sich je 1 m Wassertiefe die Beleuchtungsstärke um __40__ %

An der Oberfläche zeigt ein Belichtungsmesser __5 000__ Lux.

a) Wie groß ist die Beleuchtungsstärke in __7__ m Tiefe?

b) Wie viel % der __ursprünglichen Beleuchtungsstärke__ sind dies noch?

c) Wie hoch war die Beleuchtungsstärke, wenn in __3,5__ m Tiefe noch 752,9 Lux gemessen werden?

Aufgabe 3 (III):

Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt ca. 996 Hektopascal (hPa).
Mit jedem Kilometer Höhe nimmt er um ca. $\frac{1}{8}$ ab (Hinweis: keine lineare Abnahme!)

a) Um wie viel Prozent sinkt der Luftdruck in 2 800 m Höhe?

b) Wie viel hPa beträgt der Luftdruck auf dem höchsten Berg der Erde, dem Mount Everest mit 8 848 m? Runden Sie die Lösung auf einen Bruchteil!

c) In welcher Höhe über dem Meer beträgt der Luftdruck nur noch die Hälfte?

a) $996 \text{ hPa} \cdot 0{,}875^{2{,}8} \approx \underline{\underline{685 \text{ hPa}}}$

$PS = \dfrac{685 \cdot 100}{996} \approx \underline{\underline{68{,}8\ \%}}$ → $\underline{\underline{\text{Der Luftdruck ist um 31,2 \% gesunken.}}}$

b) $996 \cdot 0{,}875^{8{,}848} \approx 306$ → $\underline{\underline{\text{ca. } \tfrac{1}{3}}}$

c) $\dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}875} \cdot 1\,000 \approx \underline{\underline{5\,190 \text{ m}}}$

Förderbedarf:

Thema: Abnahmeprozesse		**Name:**	
Inhalt: **Radioaktiver Zerfall**	**Schwierigkeitsgrad:** **I – III**	**Kompetenz:** **1, 2, 3, 4, 5, 6**	**Leitidee:** **4**

Vorsicht! Radioaktiv!

Ursache radioaktiver Strahlung sind Umwandlungs- oder Zerfallsprozesse des radioaktiven Stoffes, wodurch sich ständig dessen Menge verringert. Den Zeitraum, in dem die Hälfte des radioaktiven Stoffes zerfällt, nennt man Halbwertszeit. Jeder radioaktive Stoff hat eine für Ihn typische Halbwertszeit. Beim Zerfall der Stoffe entstehen gefährliche Strahlungen.

Stoff	HWZ	Stoff	HWZ	Stoff	HWZ
Uran-238	4,5 Mrd. Jahre	Strontium-90	20 Jahre	Plutonium-244	76 Mio. Jahre
Plutonium-241	13 Jahre	Plutonium-239	24 000 Jahre	Cobalt-60	5 Jahre
Kohlenstoff-14	5 730 Jahre	Thorium-228	2 Jahre	Radium-226	1 620 Jahre
Jod-131	8 Tage	Cäsium-137	30 Jahre	Polonium-218	3 min

Aufgabe 1 (I):

Entnehmen Sie die HWZ des Stoffes Radium aus der Übersicht und ergänzen Sie die Tabelle!

Zeit (Jahre)	Beginn des Zerfalls	1 620			6 480
Menge (g)	48			6	

Ergänzen Sie die verschiedenen Möglichkeiten der Berechnung!

1. $48 \cdot \frac{1}{2} \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square$ $\qquad 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3$

2. $48 \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square$ $\qquad 48 \cdot 2^{-4} = 3$

3. $48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{48}{\square} = \frac{48}{\square} = \boxed{3}$

Aufgabe 2 (II):

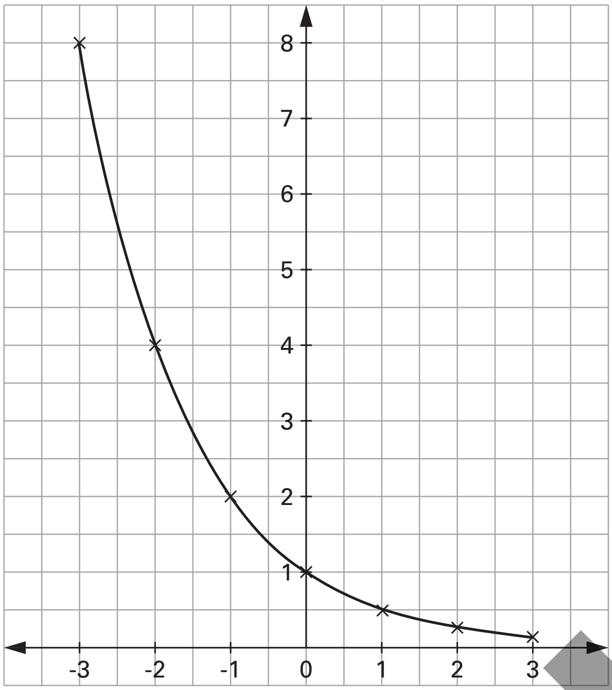
Uran hat eine HWZ von $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahren.

a) Notieren Sie die Halbwertszeit ohne Zehnerpotenz!

b) Nach wie vielen Jahren sind von 1 g Uran-238 noch 0,25 g vorhanden? Rechnen Sie im Kopf!

c) Wie lang dauert der Zerfallsprozess, wenn von 8 g Uran noch $\frac{1}{8}$ g vorhanden ist?

Aufgabe 3 (II):



a) Wie lautet die Funktionsgleichung?
b) Was wird mit der x-Achse dargestellt?
c) Um welchen Stoff handelt es sich?

Aufgabe 4 (III):

Radium hat eine Halbwertszeit von 1 620 Jahren.

a) Ermitteln Sie mithilfe einer Wertetabelle, nach welcher Zeit von 100 g Radium weniger als 10 g radioaktiver Stoff vorhanden sind!
b) Zeichnen Sie die Zerfallskurve in ein geeignetes Koordinatensystem!
c) Wie viel Gramm von ursprünglich 400 g radioaktivem Material sind nach einer Zeit von 13 365 Jahren noch nachweisbar?

Förderbedarf:

Thema: Abnahmeprozesse		**Lösungsblatt**	
Inhalt: Radioaktiver Zerfall	**Schwierigkeitsgrad:** I – III	**Kompetenz:** 1, 2, 3, 4, 5, 6	**Leitidee:** 4

Vorsicht! Radioaktiv!

Ursache radioaktiver Strahlung sind Umwandlungs- oder Zerfallsprozesse des radioaktiven Stoffes, wodurch sich ständig dessen Menge verringert. Den Zeitraum, in dem die Hälfte des radioaktiven Stoffes zerfällt, nennt man Halbwertszeit. Jeder radioaktive Stoff hat eine für Ihn typische Halbwertszeit. Beim Zerfall der Stoffe entstehen gefährliche Strahlungen.

Stoff	HWZ	Stoff	HWZ	Stoff	HWZ
Uran-238	4,5 Mrd. Jahre	Strontium-90	20 Jahre	Plutonium-244	76 Mio. Jahre
Plutonium-241	13 Jahre	Plutonium-239	24 000 Jahre	Cobalt-60	5 Jahre
Kohlenstoff-14	5 730 Jahre	Thorium-228	2 Jahre	Radium-226	1 620 Jahre
Jod-131	8 Tage	Cäsium-137	30 Jahre	Polonium-218	3 min

Aufgabe 1 (I):

Entnehmen Sie die HWZ des Stoffes Radium aus der Übersicht und ergänzen Sie die Tabelle!

Zeit (Jahre)	Beginn des Zerfalls	1 620	3 240	4 860	6 480
Menge (g)	48	24	12	6	3

Ergänzen Sie die verschiedenen Möglichkeiten der Berechnung!

1. $48 \cdot \frac{1}{2} \cdot \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = \boxed{3}$ $\qquad 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3$

2. $48 \cdot \boxed{2^{-1}} \cdot \boxed{2^{-1}} \cdot \boxed{2^{-1}} \cdot \boxed{2^{-1}} = \boxed{3}$ $\qquad 48 \cdot 2^{-4} = 3$

3. $48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{48}{\boxed{2^4}} = \frac{48}{\boxed{16}} = \boxed{3}$

Aufgabe 2 (II):

Uran hat eine HWZ von $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahren.

a) Notieren Sie die Halbwertszeit ohne Zehnerpotenz!

b) Nach wie vielen Jahren sind von 1 g Uran-238 noch 0,25 g vorhanden? Rechnen Sie im Kopf!

c) Wie lang dauert der Zerfallsprozess, wenn von 8 g Uran noch $\frac{1}{8}$ g vorhanden ist?

a) 4 500 000 000

b) 1 g : 2 = 0,5 g : 2 = 0,25 g

2 HWZ ≙ 9 Mrd. Jahre

c) $N_Z = N_0 \cdot 0{,}5^t$

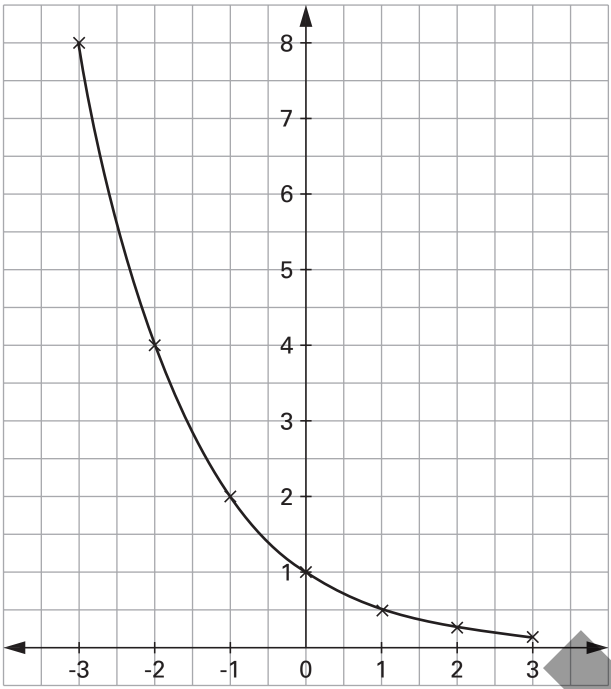
$0{,}125 = 8 \cdot 0{,}5^t \quad | : 8$

$0{,}015625 = 0{,}5^t$

$\rightarrow \frac{\log 0{,}015625}{\log 0{,}5} = 6$

$\rightarrow$ 6 · 4,5 Mrd. ≙ 27 Mrd. Jahre

Aufgabe 3 (II):



a) Wie lautet die Funktionsgleichung?
b) Was wird mit der x-Achse dargestellt?
c) Um welchen Stoff handelt es sich?

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\boxed{\text{oder}}$ $y = 2^{-x}$

b) Auf der x-Achse wird die Halbwertszeit dargestellt. (1 cm ≙ 1 HWZ)

c) $8 - 4 - 2 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ → Jod-131

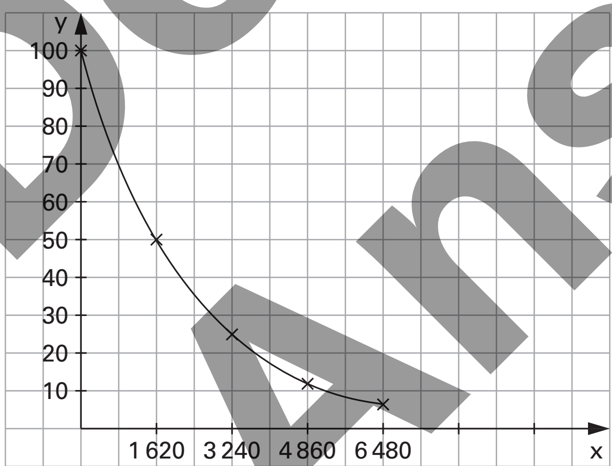
Aufgabe 4 (III):

Radium hat eine Halbwertszeit von 1 620 Jahren.
a) Ermitteln Sie mithilfe einer Wertetabelle, nach welcher Zeit von 100 g Radium weniger als 10 g radioaktiver Stoff vorhanden sind!
b) Zeichnen Sie die Zerfallskurve in ein geeignetes Koordinatensystem!
c) Wie viel Gramm von ursprünglich 400 g radioaktivem Material sind nach einer Zeit von 13 365 Jahren noch nachweisbar?

a)

Zeit (J.)	0	1 620	3 240	4 860	6 480
Menge (g)	100	50	25	12,5	6,25

b)



c) $N_t = N_0 \cdot 0{,}5^t$

$N_t = 400\text{ g} \cdot 0{,}5^{8,25}$

$\underline{\underline{N_t \approx 1{,}314\text{ g}}}$

Förderbedarf: